

LBRIS

We know
books

Dan ZAHARIA
Maria ZAHARIA

matematică algebră geometrie

clasa a VI-a

partea I

ediția a X-a



mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE®

antrenament



RECAPITULAREA MATERIEI DE CLASA A V-A

1. Exerciții și probleme recapitulative	5
2. Teste de evaluare	7

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

1.1. Mulțimi	12
1.1.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice și mulțimi nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime	12
1.1.2. Relații între mulțimi	15
1.1.3. Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale	17
1.1.4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență	19
1.1.5. Recapitulare și sistematizare prin teste	24
Test de autoevaluare	27
1.2. Divizibilitatea numerelor naturale	29
1.2.1. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	29
1.2.2. Aplicație: determinarea celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.), numere prime între ele	34
1.2.3. Aplicație: determinarea celui mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)	37
1.2.4. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$	39
1.2.5. Probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea	43
1.2.6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	45
1.2.7. Recapitulare și sistematizare prin teste	46
Test de autoevaluare	51
Test de autoevaluare	53

Capitolul II. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

2.1. Rapoarte	55
2.1.1. Raport	55
2.1.2. Titlul unui aliaj	55
2.1.3. Concentrația unei soluții	56
2.1.4. Scara unui desen	56
2.2. Procente	59
2.2.1. Procent	59
2.2.2. Aflarea a $p\%$ dintr-un număr	60
2.2.3. Aflarea unui număr când cunoaștem $p\%$ din el	60
2.2.4. Calculul raportului procentual	60
2.2.5. Creșteri și scăderi cu $p\%$	60
2.2.6. Procente din procente	61
2.3. Proporții	64
2.3.1. Proporție	64
2.3.2. Proprietatea fundamentală a proporției	64
2.3.3. Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții	64
2.3.4. Proporții derivate	65
2.3.5. Șir de rapoarte egale	65
2.3.6. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	68
2.3.7. Recapitulare și sistematizare prin teste	71
Test de autoevaluare	73

2.4. Mărimi proporționale	75
2.4.1. Mărimi direct proporționale	75
2.4.2. Mărimi invers proporționale	76
2.4.3. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	81
2.4.4. Recapitulare și sistematizare prin teste	82
2.5. Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității	84
2.6. Probabilități (Aplicație la rapoarte)	87
2.6.1. Recapitulare și sistematizare prin teste	91
Test de autoevaluare	95

GEOMETRIE

RECAPITULAREA MATERIEI DE CLASA A V-A ȘI COMPLETĂRI

1. Elemente de geometrie	97
2. Exerciții și probleme recapitulative	100
3. Teste de evaluare	102
Test de autoevaluare	105

Capitolul I. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

1.1. Unghiuri	107
1.1.1. Unghiuri opuse la vârf, congruența lor	107
1.1.2. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor lor	110
1.1.3. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare	112
1.1.4. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	115
1.1.5. Recapitulare și sistematizare prin teste	119
Test de autoevaluare	121
1.2. Paralelism	123
1.2.1. Drepte paralele: definiție, notație, construcție intuitivă prin translație. Axioma paralelelor	123
1.2.2. Criterii de paralelism. Unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă	125
1.2.3. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	129
1.2.4. Recapitulare și sistematizare prin teste	132
Test de autoevaluare	135
1.3. Perpendicularitate	137
1.3.1. Drepte perpendiculare în plan (definiție, notație, construcție). Oblice	137
1.3.2. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice	139
1.3.3. Distanța de la un punct la o dreaptă	141
1.3.4. Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă	143
1.3.5. Recapitulare și sistematizare prin teste	148
Test de autoevaluare	151
1.4. Cercul	153
1.4.1. Cerc. Elemente în cerc: centru, coardă, diametru, arc de cerc	153
1.4.2. Unghi la centru. Măsuri	156
1.4.3. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri	158
1.4.4. Recapitulare și sistematizare prin teste	161
Test de autoevaluare	163

Modele de teze semestriale	165
Indicații și răspunsuri	172

Capitolul I

Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

PP Competențe specifice

- 1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$
- 2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, $10n$, 3 și 9 în $\mathbb{N}$
- 3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.
- 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
- 5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$
- 6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$

PE-PP 1.1. Mulțimi

1.1.1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice și mulțimi nenumерice. Relația dintre un element și o mulțime



Mulțimea este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**.

Mulțimile se notează cu litere mari, iar **elementele mulțimii** se notează cu litere mici.

Dacă A este o mulțime și x , un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi x aparține lui A . Dacă x nu este un element al mulțimii A , atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi x nu aparține lui A .

O mulțime poate fi dată în trei moduri:

1. **numind fiecare element al mulțimii**; în acest caz mulțimea se scrie punând între acolade elementele sale;

Exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

2. **cu ajutorul diagramei Venn-Euler**; în acest caz, mulțimea poate fi ilustrată desenând o curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (fig. 1);

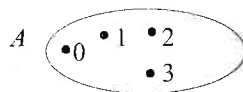


Fig. 1

3. enunțând o proprietate caracteristică elementelor mulțimii (pe care o are oricare element al mulțimii și nu o are niciun alt element care nu aparține mulțimii).

Exemplu: $A = \{x \mid x \text{ este număr natural și } x < 4\}$.

● Mulțimea care nu are niciun element se numește **mulțimea vidă**; ea se notează cu simbolul $\emptyset$.

● Mulțimea care are ca elemente toate numerele naturale este numită **mulțimea numerelor naturale**. Aceasta se notează cu $\mathbb{N}$. Așadar:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

● Numărul de elemente al unei mulțimi A se numește **cardinalul** mulțimii A și se notează $\text{card } A$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

- Scrieți mulțimea literelor din care este format cuvântul:
a) *bibliotecă*; b) *cinematecă*; c) *actualități*.
- Scrieți mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele:
a) 43 257; b) 524 123; c) 17 230 415; d) 425 730.
- Scrieți mulțimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 4.
- Scrieți mulțimea numerelor naturale cuprinse între 6 și 14.
- Scrieți mulțimea cifrelor: a) pare; b) impare.
- Fie mulțimile: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, d, e\}$; $C = \{a, c, e\}$. Căror mulțimi le aparține:
a) elementul a ; b) elementul b ?
- Fie mulțimile: $A = \{1, 3, 4, 7\}$ și $B = \{2, 4, 7, 9\}$. Scrieți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $2 \in A$; b) $3 \notin A$; c) $2 \notin B$;
d) $1^{2003} \in A$; e) $4 \in A$ și $4 \in B$; f) $1 \in A$ sau $7 \in B$.
- Scrieți următoarele mulțimi cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor:
 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $D = \{1, 3, 9, 27, 81, 243\}$.
- Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $3 \in \{0, 1, 3\}$; b) $2 \notin \{1, 4, 5\}$;
c) $4 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$; d) $0 \in \emptyset$;
e) $2^{21} \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3^{14}\}$; f) $10 \in \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 12\}$.

PE Aplicare și exersare **

- Fie $A = \{0, 1, 3\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a + a \text{ și } a \in A\}$. Scrieți elementele mulțimii B și calculați $\text{card } B$.
- Indicați propozițiile false:
a) $2 \in \{1, 7, 3\}$; b) $7^0 \in \{1, 3, 9\}$; c) $4 \notin \{1, 2, 3\}$;
d) $7 \notin \{0, 3, 7, 11\}$; e) $0 \in \emptyset$; f) $0 \notin \emptyset$.
- Scrieți următoarele mulțimi enumerând elementele acestora:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$;
 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$; $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 10\}$.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}; \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2^k, k \in \mathbb{N}, k < 4\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^x \leq 32\}; \quad D = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, x^3 \leq 64\}.$$

14. Scrieți elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^x = 1 \text{ sau } 3^x = 27\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}^*, n \leq 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 12 \text{ și } x^2 \geq 9\}; \quad D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este ultima cifră a lui } n^2, n \in \mathbb{N}\}.$$

15. Aflați cardinalul mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2\,001\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 1\,957\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 10\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}; \quad E = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x \leq 14\}; \quad F = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 2\,002\}.$$

16. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x + 3 < 7\}; \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, 2^3 - 5 > x \text{ și } x \leq 3^3 - 2\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect de două cifre}\}; \quad D = \{\overline{2x} \mid x \text{ este cifră impară}\};$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ este pătrat perfect și } x \text{ are ultima cifră } 3\}; \quad F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2^{x+1} = 32\}.$$

17. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$\text{a) } \{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 \leq 5\}; \quad \text{b) } \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x - 2^0 = 63\} = \{6\};$$

$$\text{c) } \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ este cifră pară}\}.$$

PE Aprofundare și performanță ***

18. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 8^x + 8^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 24^x + 24^{x+1} \text{ este pătrat perfect}\}.$$

19. Scrieți elementele mulțimilor de mai jos. Ce observați?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 11\}; \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x - 2 \leq 9\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid 13 \leq 2x - 1 \leq 21\}.$$

20. Determinați mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\};$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{1ab} \text{ și } x \text{ pătrat perfect}\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (1 + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^{49}) : (1 + 2^{52}) \geq x\}.$$

PE-PP Supermate ****

21. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan proprietățile:

- a) $\{1, 2, 3, 4\}$ reprezintă mulțimea formată din toate elementele mulțimilor A și B ;
 b) fiecare mulțime are câte două elemente; c) dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \in B$.

22. Se dă mulțimea A formată din numere naturale, cu proprietățile:

- a) $9 \in A$; b) dacă $x \in A$, atunci $5x + 1 \in A$; c) dacă $7x + 4 \in A$, atunci $x \in A$.
 Arătați că $6 \in A$.



● Două mulțimi sunt **egale** dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm $A = B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A \neq B$.

● Fie A și B două mulțimi; A este inclusă în B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B . Se scrie $A \subset B$. Se mai spune că B **include** pe A și se scrie $B \supset A$. În acest caz se spune despre A că este o **submulțime** a lui B . Dacă A nu este inclusă în B , adică A nu este o submulțime a lui B , notăm $A \not\subset B$ (citim „ A nu este inclus în B ”) sau $B \not\supset A$ (citim „ B nu include pe A ”).

● Se consideră că mulțimea $\emptyset$ este **submulțime** a oricărei mulțimi A .

● Orice mulțime este **inclusă** în ea însăși. Deci $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A .

● Două mulțimi sunt **egale** dacă fiecare dintre ele este o submulțime a celeilalte mulțimi: $A = B$ dacă și numai dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Scrieți toate submulțimile mulțimilor:

- a) $\{1, 2\}$; b) $\{2, 3, 5\}$; c) $\{a, b, c\}$.

2. Scrieți trei submulțimi ale mulțimii numerelor naturale.

3. Scrieți toate mulțimile X care îndeplinesc condițiile: $\{1, 3\} \subset X$ și $X \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

4. Dați trei exemple de mulțimi egale cu mulțimea vidă.

5. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x \leq 10\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x + 2 < 7\}$.

a) Scrieți elementele celor două mulțimi.

b) Stabiliți dacă $A \subset B$ sau $B \subset A$.

6. Care dintre mulțimile de mai jos sunt egale?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 8\}; \quad B = \{4, 5, 6, 7\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 7\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3, x \text{ cifră}\}; \quad E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5, x \text{ număr par}\}.$$

7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

$$\text{a) } \{1, 2, 5\} \subset \{0, 1, 2, 5, 7\}; \quad \text{b) } \{1, 2, 5\} \supset \{0, 1, 2, 5, 7\};$$

$$\text{c) } \{3, 7, 11\} \supset \{3\}; \quad \text{d) } \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 2\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\};$$

$$\text{e) } \emptyset \subset \{0\}; \quad \text{f) } \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este cifră a numărului } 34\,021\}.$$

PE Aplicare și exersare **

8. Fie $M = \{11, 21, 31, \dots, 91\}$.

a) Scrieți cardinalul mulțimii M .

b) Scrieți trei submulțimi ale mulțimii M formate din câte patru elemente.

c) Scrieți toate submulțimile mulțimii M formate din câte opt elemente.

9. Fie $M = \{0, 1, 7\}$.

a) Scrieți toate submulțimile mulțimii M .

b) Scrieți mulțimea X formată din submulțimile mulțimii M .

c) Scrieți cardinalul mulțimii X .

10. Fie $M = \{x \mid x \text{ este cifră pară}\}$.
 a) Scrieți elementele mulțimii M .
 b) Scrieți trei submulțimi care sunt incluse în M .
 c) Scrieți trei mulțimi care includ mulțimea M .

11. Determinați toate valorile lui x pentru care următoarele afirmații să fie adevărate:
 a) $\{x\} \subseteq \{2, 4\}$; b) $\{2, 3, x\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$; c) $\{1, x, 4\} \subseteq \{1, 4, 6, 7\}$.

12. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

- a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B , atunci $A \dots B$.
 b) Dacă există în mulțimea A cel puțin un element care nu este element al mulțimii B , atunci $A \dots B$.
 c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A , atunci $A \dots B$.

13. Fie mulțimile: $A = \{2x - 1; x; 3x + 1\}$ și $B = \{2(x + 1) - 3; 2x - 7; 2x + 8\}$. Determinați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $A = B$.

14. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 3\}$; $C = \{2\}$; $D = \{2, 3, 4\}$; $E = \{3, 2\}$. Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile: „ $\subset$ ”, „ $\supset$ ”, „ $\subsetneq$ ”, „ $\supsetneq$ ”, „ $=$ ” sau „ $\neq$ ”.

- a) $A \dots B$; b) $C \dots A$; c) $B \dots D$; d) $B \dots E$; e) $C \dots D$; f) $E \dots A$.

15. Fie $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \leq x < 5\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false?

- a) $3 \in A$; b) $1 \notin B$; c) $\{0, 1\} \subset A$; d) $\{2, 3, 4\} \subseteq B$;
 e) $\emptyset \subset C$; f) $C \supset A$; g) $B \not\subset C$; h) $\{1, 5\} \not\subset C$.

PE Aprofundare și performanță ***

16. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 4 \leq x \leq 7\}$; $B = \{y \mid y = x + 2, x \in A\}$ și $C = \{z \mid z = 2x, x \in A\}$.

- a) Precizați care dintre propozițiile următoare sunt false și care sunt adevărate:

- 1) $\{5, 6\} \subset A$; 2) $A \subset C$; 3) $\{7, 8\} \subseteq B$.

- b) Calculați card A , card B , card C .

17. Precizați cardinalul mulțimilor: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x^2 < 70\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < x^3 \leq 125\}$.

18. Fie mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x + a < 14, a \in \mathbb{N}\}$. Determinați a , număr natural, astfel încât:

- a) card $M = 0$; b) card $M = 1$; c) card $M = 2$; d) card $M = 3$.

19. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 3 < 9\}$; $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y + 2 < 8\}$ și $C = \{z \in \mathbb{N} \mid z = 3^n, n \in \mathbb{N}, n \leq 2\}$. Precizați care dintre propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

$$A = B, A \subset C, C \subset B, A = C, A \not\supset B, B \neq C.$$

PE-PP Supermate ****

20. Se dă mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2014\}$. Determinați numărul submulțimilor formate din două elemente cu suma egală cu 2015.

21. Fie $M = \{1, 4, 7, 10, \dots, 97, 100\}$ și P o submulțime a sa formată din 19 elemente. Arătați că în P există două elemente distincte a căror sumă este divizibilă cu 52.



O mulțime care are n elemente, unde n este un număr natural, este o **mulțime finită**. Numărul de elemente ale unei mulțimi finite A se numește **cardinalul** mulțimii și se notează **card** A .

O mulțime care nu este finită se numește **mulțime infinită**.

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele șirului numerelor naturale este **mulțimea numerelor naturale**.

După cum știm deja, aceasta se notează cu $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

$\mathbb{N}^*$ este mulțimea numerelor naturale nenule: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$.

Mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi infinite și $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

Fie a un număr natural. Notăm cu D_a mulțimea divizorilor lui a :

$$D_a = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } n \mid a\}.$$

Evident, D_a nu este mulțimea vidă ($D_a \neq \emptyset$), deoarece D_a are cel puțin un element ($a \in D_a$, căci $a \in \mathbb{N}$ și $a \mid a$). Se observă că $D_a \subset \mathbb{N}$ (pentru $a \neq 0$), $D_0 = \mathbb{N}$ și $D_1 = \{1\}$.

Notăm cu M_a mulțimea multiplilor lui a :

$$M_a = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } m \text{ este multiplul lui } a\}.$$

Evident, M_a nu este mulțimea vidă ($M_a \neq \emptyset$), deoarece M_a are ca elemente pe $a, 2a, 3a, \dots$.

Deci, $M_a = \{0, a, 2a, 3a, 4a, \dots\}$. Se observă că $M_a \subset \mathbb{N}$ (pentru $a \neq 1$), $M_0 = \{0\}$ și $M_1 = \mathbb{N}$.

Oricare ar fi a număr natural nenul, **mulțimea divizorilor lui a este o mulțime finită**, iar **mulțimea multiplilor lui a este o mulțime infinită**.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Scrieți mulțimile: D_2 , D_{14} , D_{44} , D_7 , D_{28} , D_{18} , D_{39} , D_{45} .

2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $D_4 \subset D_{20}$; b) $D_7 \subset D_{28}$; c) $D_3 \subset D_{13}$.

PE Aplicare și exersare **

3. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \in D_{15}\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x + 1 \in D_{18}\};$$

$$C = \{x \in D_{10} \text{ și } x + 2 \in D_{12}\};$$

$$D = \{x \in M_{10} \text{ și } x - 4 \in D_{26}\}.$$

4. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 18 \text{ și } 2x + 3 \leq 15\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 14 \text{ și } 2x - 1 < 19\}.$$

5. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 3 \mid x\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 41 \mid (2x - 1)\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 5 \mid (3x - 1)\};$$

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 4 \mid (x + 2)\}.$$

6. Scrieți elementele următoarelor mulțimi:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+2) \mid 50 \text{ și } 3 \mid x\}; \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (2x+3) \mid 18\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq 2x < 10 \text{ și } (2x+1) \mid 7\}.$$

7. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid (x+7)\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \mid (x+6)\}$;
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x-1) \mid x\}$.

- a) Scrieți mulțimile A , B , C , enumerând elementele acestora.
 b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

8. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x-5) \mid (3x+18)\}$;
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (2x+1) \mid (4x+19)\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+2) \mid (5x+27)\}$.

9. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (2x-1) \mid 121\}; \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (3x+1) \mid 125\};$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid (x+50)\}; \quad D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (2x+1) \mid 65 \text{ și } 17 \nmid (x+2)\}.$$

PE Aprofundare și performanță ***

10. Fie mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 45 \text{ și } 3 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \mid 8 \text{ sau } x \mid 6\}$;
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, (x+3) \mid 36 \text{ și } 4 \mid x^2\}$.

- a) Scrieți mulțimile enumerând elementele acestora.
 b) Precizați cardinalul fiecărei mulțimi.

11. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (2x+1) \mid (3x+5)\}$;
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid (x^2+2)\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+2) \mid (x^2+4x+15)\}$.

12. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x-1) \mid 11\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } (x+1) \mid 16\}$;
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}^*, (x+2) \mid 20, 3 \mid x\}$.

13. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 7 \mid x\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 42 \mid (2x-1)\}$;
 $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 5 \mid (3x+1)\}$; $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 4 \mid (x+5)\}$.

14. Determinați mulțimile: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \mid \overline{3x8}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 6 \mid \overline{x56}\}$.

PE-PP Supermate ****

15. Fie mulțimile $A = \{x \mid x = 1\,995n + 7, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 1\,985p + 3, p \in \mathbb{N}\}$.

Stabiliți dacă mulțimea $A \cap B$ are un număr finit de elemente sau o infinitate de elemente.

16. Arătați că oricare mulțime de 5 numere naturale are o submulțime de 3 elemente, astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 3.



REUNIUNEA MULȚIMILOR

Reuniunea a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre ele.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Ilustrăm reuniunea mulțimilor A și B cu ajutorul unei diagrame Venn–Euler, reuniunea fiind reprezentată în figura 1 prin porțiunea hașurată.

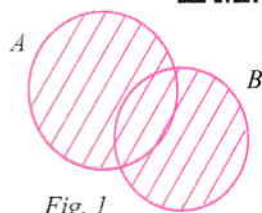


Fig. 1

INTERSECȚIA MULȚIMILOR

Intersecția a două mulțimi A și B este mulțimea elementelor comune celor două mulțimi.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Cu ajutorul unei diagrame Venn–Euler, intersecția a două mulțimi este ilustrată în figura 2 prin porțiunea hașurată.

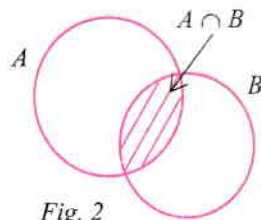


Fig. 2

Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci mulțimile A și B sunt **mulțimi disjuncte**.

DIFERENȚA A DOUĂ MULȚIMI

Fie A și B două mulțimi. Mulțimea formată din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B se numește diferența dintre mulțimea A și mulțimea B .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

În figura 3, porțiunea hașurată ilustrează diferența $A - B$.

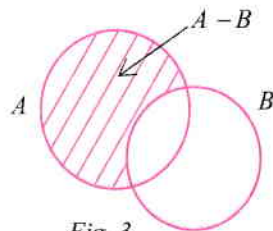


Fig. 3

PRINCIPIUL INCLUDERII ȘI EXCLUDERII (FACULTATIV)

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Exemple:

Problema 1. Aflați câte numere naturale nenule mai mici decât 1 001 nu se divid nici cu 2, nici cu 5.

Rezolvare: Fie A mulțimea numerelor naturale mai mici decât 1 001 care sunt divizibile cu 2. Avem $1\,000 : 2 = 500$. Deci, $\text{card}(A) = 500$.

Fie B mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 care sunt divizibile cu 5. Avem $1\,000 : 5 = 200$. Deci, $\text{card}(B) = 200$.

$A \cap B$ este mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 care sunt divizibile și cu 2, și cu 5, deci, cu 10. Avem $1\,000 : 10 = 100$.

Deci, $\text{card}(A \cap B) = 100$.

$A \cup B$ este mulțimea numerelor naturale nenule mai mici decât 1 001 divizibile sau cu 2, sau cu 5.

Avem: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

$\text{card}(A \cup B) = 500 + 200 - 100 = 600$.

Deci, $1\,000 - 600 = 400$ numere naturale nenule mai mici decât 1 001 nu sunt divizibile nici cu doi și nici cu cinci.

Problema 2. Fie A și B două mulțimi astfel încât: $A \cap B = A \cup B$. Arătați că $A = B$.

Rezolvare: Avem $A - (A \cap B) = A - (A \cup B) = \emptyset \Rightarrow A - (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow A \subset A \cap B \Rightarrow A \subset B$ (1).

Avem $B - (A \cap B) = B - (A \cup B) = \emptyset \Rightarrow B - (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow B \subset A \cap B \Rightarrow B \subset A$ (2).
Din (1) și (2) $\Rightarrow A = B$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Fie mulțimile A , B și C reprezentate cu ajutorul diagramelor (fig. 1).

a) Enumerați elementele mulțimilor A , B și C .

b) Enumerați elementele mulțimilor:

$$M_1 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}; \quad M_2 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\};$$

$$M_3 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}; \quad M_4 = \{x \mid x \in B \text{ sau } x \in C\};$$

$$M_5 = \{x \mid x \in B \text{ și } x \in C\};$$

$$M_6 = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B \text{ și } x \in C\};$$

$$M_7 = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B \text{ sau } x \in C\}.$$

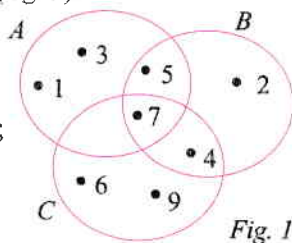


Fig. 1

2. Fie mulțimile: $A = \{1, 2, 5, 6\}$ și $B = \{2, 3, 7\}$. Calculați: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ și $B - A$.

3. Scrieți două mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Determinați toate soluțiile.

4. Dacă $M \cup \{2\} = \{1, 2, 3\}$, enumerați elementele mulțimii M .

5. Fie $C = \{1, 3\}$. Scrieți:

a) două mulțimi având intersecția C ; b) trei mulțimi având intersecția C .

6. Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ și $C = \{3, 5, 7\}$.

a) Determinați $B \cap C$ și $A \cup (B \cap C)$.

b) Determinați $A \cup B$, $A \cup C$ și $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Comparați rezultatele. Ce observați?

7. Fie $A = \{0, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ și $C = \{1, 2, 5\}$.

a) Determinați $B \cup C$ și $A \cap (B \cup C)$.

b) Determinați $A \cap B$, $A \cap C$ și $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) Comparați rezultatele. Ce observați?

PE Aplicare și exersare **

8. Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 3\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3x + 1 < 10\}$.

a) Enumerați elementele mulțimilor A , B , C .

b) Calculați: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $B - C$, $C - B$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cap B) \cup C$, $(A - B) \cup (B - A)$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A - B) \cap C$, $(A \cup B) - C$, $(A \cap B) - A$, $(A - C) \cap (C - A)$.

9. Fie $A = \{x \mid x = 5k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că A și B sunt mulțimi disjuncte.

20 10. Fie $A = \{x \mid x = 6k + 3, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 4p + 2, p \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $A \cap B = \emptyset$.

- 11.** Fie $A = \{x \mid x = 14k + 12, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = 21p + 17, p \in \mathbb{N}\}$. Verificați dacă A și B sunt disjuncte.
- 12.** Fie $A = \{x \mid x = 4k + 3, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $A \cap B = \emptyset$.
- 13.** Fie $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{20} + 1 \leq x \leq 2^{20} + 2^{10}\}$. Arătați că $A \cap B = \emptyset$.
- 14.** Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $A \cap B = \{3, 5\}$; c) $A - B = \{1, 6\}$.
- 15.** Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
 a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; b) $A \cap B = \{a, e\}$; c) $B - A = \{d, f\}$.
- 16.** Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
 a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$; b) $A \cap B = \{2, 3, 5\}$;
 c) $A \cup \{2, 5, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; d) $B \cup \{0, 2, 4\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.
- 17.** Într-o clasă sunt 29 de elevi. 19 elevi participă la cercul de informatică și 15 elevi participă la cercul de fizică. Fiecare elev participă la cel puțin una dintre aceste activități. Calculați câți elevi participă la ambele activități.
- 18.** Fie $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{x \mid x^3 \leq 27\}$. Aflați:
 a) A și B ; b) $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.
- 19.** Se dau mulțimile: $A = \{a, b, c\}, B = \{a, c, d\}, C = \{c, d, e\}$. Determinați mulțimile:
 a) $(A - B) \cup C$; b) $(A - C) \cap B$;
 c) $(B - C) \cup (A - \emptyset)$; d) $A \cup B \cup C$;
 e) $A \cap B \cap C$; f) $(A \cap B) - C$.
- PE Aprofundare și performanță *****
- 20.** Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^k, 1 < k \leq 4\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 3^{k-1}, 3 \leq k < 6\}$. Determinați mulțimile: $A, B, A \cup B, A \cap B, A - B, (A - B) \cup (B \cap A), (A \cup B) \cap (B - A), A \Delta B$, unde $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ și se numește **diferența simetrică** dintre mulțimea A și mulțimea B .
- 21.** Aflați câte numere naturale nenule mai mici decât 100 nu sunt divizibile nici cu 3, nici cu 7.
- 22.** Determinați mulțimea A care verifică simultan condițiile:
 a) $A \cap \{3, 5, 6\} = \{3, 5, 6\}$; b) $A \cup \{3, 5, 6\} = \{3, 5, 6\}$.
- 23.** Fie mulțimile:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este cifră impară}\}; B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x - 1 \leq 5\}; C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x^2 + 1 \leq 19\}$.
 a) Enumerați elementele mulțimilor A, B și C .
 b) Calculați: $A \cup B, A \cap B, A \cap C, A - B, B - C, A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, B \Delta C$.
 c) Indicați pe câte o diagramă fiecare dintre operațiile de la punctul b).
- 24.** Determinați cardinalul mulțimilor:
 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2004} < x < 2^{2005}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 2^{2005}\}$.
- 25.** Determinați mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
 a) $A \cap B = \{c, d\}$; b) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$;
 c) mulțimile $A - B$ și $B - A$ au același număr de elemente.